

# 最差性能最优通用信号模型稳健波束形成算法

刘聪锋<sup>1</sup>, 廖桂生<sup>2</sup>

(1. 西安电子科技大学电子对抗研究所, 陕西西安 710071;

2. 西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室, 陕西西安 710071)

**摘要:** 针对空间分布散射信号源的稳健波束形成问题, 提出了一种新的通用信号模型稳健波束形成算法, 不仅得到了封闭形式的最优加权矢量, 而且获得了最优的性能改善. 其中分析了与传统对角加载的关系, 给出了最优加载量的计算方法, 并得出具有最优负加载的解才可以获得最优的性能改善. 最后的仿真分析验证了所提出算法的正确性和有效性, 而且发现最优加权矢量只取决于给定的接收数据和未知的失配量, 与失配约束参数的选择无关, 而失配约束参数只是参与最优权计算的辅助参数.

**关键词:** 自适应波束形成; 最差性能最优; 通用信号模型; 负对角加载

**中图分类号:** TN911      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2010) 06-1249-07

## Robust Beamforming Algorithm for General Signal Models Using Worst-Case Performance Optimization

LIU Cong-feng<sup>1</sup>, LIAO Gui-sheng<sup>2</sup>

(1. Research Institute of Electronic Countermeasure, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;

2. National Lab of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** For the robust adaptive beamforming problem of the space distributed signal models, a robust beamforming algorithm for general signal models is proposed. Not only the close-form solution is found, but also the optimal performance improvement can be obtained. Therein, the relationship of the proposed algorithm with the traditional diagonal loading is analyzed, and the optimal loading level can be computed exactly, the solution with the optimal negative loading has the optimal performance. The last simulation attests its correctness and effectiveness, and indicates that the optimal weight vector is only determined by the given received data and the unknown mismatch, and is independent of the mismatch constraint parameter, but the mismatch constraint parameter is the adjective parameter for the optimal weight computing.

**Key words:** adaptive beamforming; worst-case performance optimization; general signal models; negative diagonal loading

### 1 引言

自适应波束形成技术广泛应用于雷达、声纳、地震学、麦克风阵列语音处理以及无线通信中. 而且当有用信号的假定阵列响应和其真实值之间存在失配时, 波束形成器的性能将会急剧地下降. 同样, 当信号的阵列响应准确已知时, 较小的训练样本也会引起波束形成器的性能下降. 因此, 稳健性就成为自适应阵列处理的必须要求.

在传统的稳健自适应波束形成算法中, 如线性约束最小方差(LCMV)波束形成算法、基于特征空间(ESB)的稳健算法<sup>[1]</sup>和协方差矩阵消锥(CMT)方法<sup>[2]</sup>, 它们尽管能够改善信号方向失配的稳健性, 但是不能改善其它如

较差的阵列校正、未知传感器互耦、近场波前失真、源扩展以及相干和非相干的局部散射等影响. 近几年提出了在理论上比较严格的稳健波束形成算法<sup>[3~17]</sup>, 其主要思想是定义了所谓的不确定集和使最差性能最优, 尽管有些算法给出了具体的加载量计算方法, 但是性能改善并不明显, 而其它算法只是给出了近似的求解方法.

当前大多数稳健算法的主要缺点就是用于点信号源模型, 而且多数算法不能直接推广到高秩信号模型, 如无线通信和声纳中的非相干散射(空间分布)或具有波前扰动的信号源. 因此, 天线阵列不能再将这些信号源作为点源, 即应当建模为具有一定中心角和角度扩展的空间分布信号源. 此时, 必须利用高秩信号源模型来描述信号散射以及波前扰动的影响, 而且通常利用信号

的协方差矩阵来描述有用信号的阵列响应,而不是信号的导向矢量. S. Shahbazpanahi 等人提出了通用信号模型的稳健波束形成算法<sup>[12]</sup>,并给出了具体的求解公式,而且最优解必须借助于失配约束参数来求解. 但是通过对求解进行分析发现,其中限制了约束参数必须小于协方差矩阵的最大特征值,而且算法的性能改善依赖于失配约束参数的选取,因此严重制约着算法的实际应用,其中尽管分析了与传统对角加载之间的关系,但没能给出最优加权矢量的求解方法.

本文针对空间分布散射信号源的稳健波束形成问题,提出了一种新的通用信号模型稳健波束形成算法,通过对波束形成器进行建模和求解,不仅得到了封闭形式的最优加权矢量,而且获得了最优的性能改善. 其中分析了该算法与传统对角加载之间的关系,而且给出了最优加载电平的求解方法,并得出具有负加载的最优解才可以获得最优的性能改善. 最后的仿真分析验证了算法的正确性和有效性,而且发现随着有用信号失配约束参数的增加,波束形成器的性能逐渐改善,最后趋于最优的恒定值,然而随着其它失配约束参数的增加,波束形成器的性能逐渐变差,最后也趋于某一恒定值.

## 2 稳健波束形成算法的模型

在实际的波束形成应用中,假定的信号协方差矩阵往往存在一定的误差,即在假定的信号协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$  和其真实值  $\hat{\mathbf{R}}_s$  之间具有一定的失配. 假设具有如下关系:

$$\hat{\mathbf{R}}_s = \mathbf{R}_s + \Delta \quad (1)$$

其中  $\Delta$  为一未知的 Hermitian 误差矩阵,即用于描述有用信号阵列响应失配的影响,而且可以利用某些已知的常数  $\epsilon > 0$  利用范数进行约束,即:

$$\|\Delta\| \leq \epsilon \quad (2)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示矩阵的 Frobenius 范数.

为了改善对于任意有用信号失配的稳健性,将传统的最小无失真响应(MVDR)问题进行如下修改,即替换只对假定有用信号要求的固定无失真响应,取而代之的是对于所有可能的有用信号保持无失真响应,即要求:

$$\mathbf{w}^H(\mathbf{R}_s + \Delta)\mathbf{w} \geq \sigma_\epsilon, \|\Delta\| \leq \epsilon \quad (3)$$

其中,  $(\cdot)^H$  表示矩阵的共轭转置运算,  $\mathbf{w}$  为波束形成算法的加权矢量,而  $\sigma_\epsilon$  为约束条件中的最小无失真响应值,其取值取决于失配约束参数  $\epsilon$ . 通过比较可知, MVDR 应用了一个单一的等式约束,而式(3)建立了无数个不等式约束,即保证了在最差失配条件下的无失真响应. 因此,基于最差性能最优的稳健波束形成算法可以

描述为:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H(\mathbf{R}_s + \Delta)\mathbf{w} \geq \sigma_\epsilon, \|\Delta\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{R}$  为样本协方差矩阵. 仿照文[12]中的处理方法,式(4)可以等价转化为如下的简化形式:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H(\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})\mathbf{w} = \sigma_\epsilon \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵. 该波束形成算法具有简单的等式约束,而且比较容易求解.

该波束形成算法与文献[12]中的模型不同,文献[12]中的无失真响应最小值定义为 1,即  $\sigma_\epsilon = 1$ ,而上式的  $\sigma_\epsilon$  取值依赖于失配约束参数  $\epsilon$ . 因此文献[12]中的模型可以看作是该算法的一个特例.

由于  $\epsilon$  是人为指定的用于约束失配量的参数,因此理论上  $\epsilon$  可以取大于等于零的所有值. 然而从上式的约束条件可得  $\mathbf{w}^H \mathbf{R}_s \mathbf{w} = \epsilon \mathbf{w}^H \mathbf{w} + \sigma_\epsilon$ , 因此若加权矢量的模恒定不变,例如假设为归一化值,则无失真响应约束条件实际上是保证假定信号的无失真响应. 因此对于简化的波束形成算法(5),如果  $\epsilon$  取值较小,即满足  $(\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})$  为半正定矩阵,则  $\sigma_\epsilon$  可以取大于零的实数即可;反之,  $\sigma_\epsilon$  应该取小于零的实数. 因此  $\sigma_\epsilon$  的取值只要满足简化波束形成算法(5)的约束条件,即与  $\mathbf{w}^H(\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})\mathbf{w}$  具有相同的符号即可.

## 3 稳健波束形成算法的求解

上面的简化波束形成算法(5)可以利用 Lagrange 乘数方法进行求解,其解可以通过最小化如下的函数获得:

$$G(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} + \lambda(\sigma_\epsilon - \mathbf{w}^H(\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})\mathbf{w}) \quad (6)$$

其中  $\lambda$  为 Lagrange 乘数. 求式(6)的梯度并令其为零,可得具有如下广义特征方程形式的解,即:

$$\mathbf{R} \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})\mathbf{w} \quad (7)$$

其中 Lagrange 乘数  $\lambda$  可以被看作相应的广义特征值. 因此简化波束形成算法(5)的最优解就是矩阵束  $\{\mathbf{R}, (\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})\}$  的最小广义特征值所对应的广义特征矢量. 对上式两边乘上  $\mathbf{R}^{-1}$  可得:

$$\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I}) \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{w}, \lambda \neq 0 \quad (8)$$

该式就是矩阵  $\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})$  的特征方程.

利用广义特征方程(7)可得:

$$\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}^H(\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})\mathbf{w} \quad (9)$$

由于  $\mathbf{R}$  为正定矩阵,因此 Lagrange 乘数  $\lambda$  和  $\mathbf{w}^H(\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})\mathbf{w}$  具有相同的符号,而且利用上式可以得到更加简化的  $G(\mathbf{w}, \lambda)$ , 即:

$$G(\mathbf{w}, \lambda) = \lambda \sigma_\epsilon \quad (10)$$

因此,  $G(\mathbf{w}, \lambda)$  将始终保持为非负值. 为了使得  $G(\mathbf{w}, \lambda)$  最小, 应取广义特征方程的最小特征值为最优 Lagrange 乘数  $\lambda$ . 故应该取最小广义特征值所对应的特征矢量作为最优加权矢量, 由于广义特征方程中的最小广义特征值对应于特征方程中的最大特征值, 因此, 最优加权矢量可以被表示为:

$$\mathbf{w} = P\{\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}_s - \epsilon\mathbf{I})\} \quad (11)$$

其中  $P\{\cdot\}$  表示求矩阵的主特征矢量算子, 即对应于最大特征值的特征矢量.

此处将求解最优 Lagrange 乘数  $\lambda$  转化为求解特征分解中的最大特征值, 而且同时得到的相应特征矢量为该波束形成算法的最优加权矢量. 由于特征矢量可以按照任意方式进行归一化, 因此可以对上式的最优加权矢量按照约束条件进行归一化, 使其满足  $\mathbf{w}^H(\mathbf{R}_s - \epsilon\mathbf{I})\mathbf{w} = \sigma_\epsilon$ , 而且并不影响输出的信噪比, 因此对权矢量的归一化是无关紧要的, 同样  $\sigma_\epsilon$  的选择也不重要, 但必须满足约束条件.

其实在求解过程中, 尽管约束条件中的无失真响应最小值参与了求解, 然而并没有出现在最优解的表达式中, 即最小的无失真响应值对求解结果没有影响, 但是影响并决定求解过程. 然而文献[12]中的模型定义无失真响应最小值为 1, 因此在求解过程中, 必须限制 Lagrange 乘数  $\lambda > 0$ , 而且  $\epsilon$  必须小于  $\mathbf{R}_s$  的最大特征值. 这样不仅违反了失配约束参数  $\epsilon$  在理论上可以取大于等于零的所有值, 而且使得约束参数  $\epsilon$  在实际应用中的选择比较困难. 重要的是, 算法性能的改善严重依赖于选取的参数, 因此波束形成算法很难达到最优的性能, 这可以通过下面的理论分析和仿真试验进一步验证.

尽管该最优加权矢量与文献[12]中的权矢量具有相同的形式, 即必须借助于约束参数  $\epsilon$  来求解, 但是  $\epsilon$  的取值范围不同, 文献[12]中限制了  $\epsilon$  必须小于  $\mathbf{R}_s$  的最大特征值, 然而本文可以取大于等于零的所有值. 由于该波束形成算法的最小无失真响应值  $\sigma_\epsilon$  取决于  $\epsilon$ , 因此当  $\epsilon$  较小时,  $\sigma_\epsilon$  为正值, 而且 Lagrange 乘数  $\lambda$  也为正值, 然而当  $\epsilon$  较大时,  $\sigma_\epsilon$  为负值, 同样 Lagrange 乘数  $\lambda$  也为负值. 由于  $\epsilon$  是用于约束有用信号失配的, 因此理论上取的越大, 约束越强, 因而性能的改善也将越接近于最优. 重要的是, 所提出的算法将会使信号失配约束参数的选择得到简化, 而且可以取得更优的性能改善.

#### 4 稳健波束形成算法的对角加载解释

已有的稳健波束形成算法几乎都可以表示成原算法的对角加载形式, 对于通用信号模型稳健波束形成算法也具有该性质, 而且还可以获得准确的最优加载电平.

利用前面的广义特征方程(7)可得:

$$(\mathbf{R} + \lambda\epsilon\mathbf{I})\mathbf{w} = \lambda\mathbf{R}_s\mathbf{w} \quad (12)$$

对式(12)两边乘上  $(\mathbf{R} + \lambda\epsilon\mathbf{I})^{-1}$  可得:

$$(\mathbf{R} + \lambda\epsilon\mathbf{I})^{-1}\mathbf{R}_s\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{w}, \lambda \neq 0 \quad (13)$$

当 Lagrange 乘数  $\lambda$  满足式(13)时, 式(13)也可以看作是矩阵  $(\mathbf{R} + \lambda\epsilon\mathbf{I})^{-1}\mathbf{R}_s$  的特征方程. 同样由于广义特征方程中的最小广义特征值对应于特征方程中的最大特征值, 因此, 最优加权矢量也可以被表示为:

$$\mathbf{w} = P\{(\mathbf{R} + \lambda\epsilon\mathbf{I})^{-1}\mathbf{R}_s\} \quad (14)$$

而该最优加权矢量具有对角加载的形式, 所以该稳健波束形成算法也归属于对角加载类算法. 然而对于该解, 关键是求解最优的加载电平, 即  $\lambda\epsilon$ . 由于该最优加权矢量的求解过程与前面第 3 节的求解过程一一对应, 因此两种求解方法具有相同的最优 Lagrange 乘数  $\lambda$  和加权矢量  $\mathbf{w}$ .

尽管文献[12]也分析了其算法与传统对角加载之间的关系, 但是未能给出最优加载量的计算方法, 因此不能体现稳健波束形成算法的本质, 即对角加载. 而且按照文献[12]中的建模和求解方法, 很难对其算法进行深入的性能分析. 然而通过上面的建模和求解, 不仅得到了最优解, 而且可以对算法进行深入的分析, 更重要的是简化了约束参数的选取, 并得到了最优的性能改善. 由于  $\epsilon$  是指定的用于约束失配量的参数, 因此若  $\epsilon$  较小, 则约束不强甚至不起作用, 然而此时的最优  $\lambda$  为正数, 即对应于正加载. 反之, 若  $\epsilon$  较大, 则约束比较强, 即在此约束下, 失配量相比非常小, 然而此时的最优  $\lambda$  为负数, 即对应于负加载. 因此对于所提出的稳健波束形成算法, 具有负加载的最优解才可以获得最优的性能改善, 这与传统分析以及文献[12]中的结论具有很大的不同, 它们都只考虑正加载. 通过上面的分析也可以得到  $\epsilon$  的选取方法, 即在实际应用中,  $\epsilon$  应选取较大的参数, 不仅要使失配量满足失配约束条件, 更要使得在约束下失配量相比非常小, 这样可以获得最优的性能改善.

#### 5 稳健波束形成算法的扩充

如果再考虑其它的失配类型, 例如由数据非平稳性、小训练样本数量以及均衡误差等引起的所有失配, 因此在假定的样本协方差矩阵  $\mathbf{R}$  和其真实值  $\hat{\mathbf{R}}$  之间也会具有一定的失配, 即:

$$\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \Delta_1 \quad (15)$$

其中  $\Delta_1$  为一未知的 Hermitian 误差矩阵, 即用于描述其它阵列响应失配的影响, 同样可以利用某些已知的常数  $\gamma > 0$  利用范数进行约束, 即:

$$\|\Delta_1\| \leq \gamma \quad (16)$$

则上面的稳健波束形成算法(4)可以扩充为下式:

$$\begin{cases} \min_w \max_{\|\Delta_1\| \leq \gamma} \mathbf{w}^H (\mathbf{R} + \Delta_1) \mathbf{w} \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H (\mathbf{R}_s + \Delta_2) \mathbf{w} \geq \sigma_\epsilon, \|\Delta_2\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (17)$$

其中  $\Delta_2$  描述了有用信号的失配,即和前面的  $\Delta$  意义相同.由于该波束形成算法是在最差失配  $\Delta_2$  条件下保持有用信号的无失真阵列响应,同时使得在最差失配  $\Delta_1$  条件下的阵列输出功率最小,因此是基于最差性能的最优准则.仿照文献[12]中的方法,同样可以对该问题进行化简,可得如下简化形式:

$$\begin{cases} \min_w \mathbf{w}^H (\mathbf{R} + \gamma \mathbf{I}) \mathbf{w} \\ \text{s.t. } \mathbf{w}^H (\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I}) \mathbf{w} = \sigma_\epsilon \end{cases} \quad (18)$$

与前面的求解方法相似,该稳健波束形成算法的最优解为:

$$\mathbf{w} = P \{ (\mathbf{R} + \gamma \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I}) \} \quad (19)$$

对应的对角加载形式解为:

$$\mathbf{w} = P \{ (\mathbf{R} + \gamma \mathbf{I} + \lambda \epsilon \mathbf{I})^{-1} \mathbf{R}_s \} \quad (20)$$

其中的最优 Lagrange 乘数  $\lambda$  等于矩阵  $(\mathbf{R} + \gamma \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{R}_s - \epsilon \mathbf{I})$  最大特征值的倒数.

当考虑有用信号失配以外的其它失配时,由于失配约束参数  $\gamma$  出现在目标函数中,因此如何确定失配参数  $\gamma$  值得进行深入的研究.因为如果选择的比较小,则达不到改善效果,如果较大,则会损失较大的自由度,即加载过量,使得波束形成算法的性能变差.

由于该稳健波束形成算法考虑了所有可能的失配情况,且在最差性能最优的准则下得出了最优解,因此具有普遍的适用性.

## 6 仿真分析

为了验证所提出算法的稳健性、求解的正确性,并与文献[12]中的算法进行比较,进行了详细的仿真分析.假设阵列为理想均匀线阵,阵元数为  $M = 10$ ,阵元间距为半波长.

### 6.1 稳健性分析

为了分析波束形成算法的稳健性,分别进行了点散射源和空间分布散射源的仿真,由于在实际中失配参数是无法获得的,故仿真中的失配约束参数以假定的协方差矩阵范数为参考进行选取.

图1给出了点散射源在有用信号失配存在时的方向图,其中 Ideal-SMI 表示理想条件(无失配)下样本协方差矩阵求逆(SMI)算法(即 MVDR)的方向图,SMI 表示失配条件下的方向图,WCPO 表示本文提出的最差性能最优(WCPO)稳健算法的方向图.仿真中的信号位于  $0^\circ$ ,信噪比为  $-5\text{dB}$ ,信号失配是通过信号的指向失配引入的,指向失配角为  $5^\circ$ ,其约束参数选择为假定协方差

矩阵范数的 10 倍,而  $\|\Delta_2\| = 6.96$ ,  $\|\mathbf{R}_s\| = 10$ ,即  $\epsilon = 100$ ,满足失配约束条件.显然,SMI 具有一定的指向误差,而 WCPO 准确地指向了信号的真实方向,而且相对于 Ideal-SMI 具有更低的旁瓣.

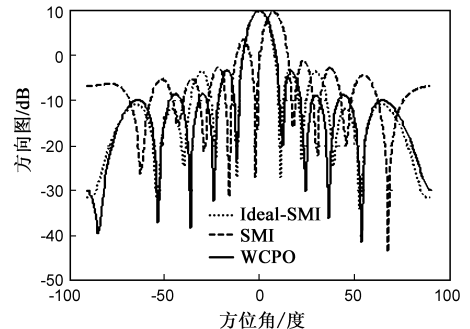


图1 有用信号失配存在时的方向图(点散射源场景)

图2给出了点散射源在有用信号和其它失配存在时的方向图,其中有用信号失配参数同图1,而其它失配是通过一 Hermitian 误差矩阵引入的,其约束参数选择为数据协方差矩阵范数的 1 倍,而  $\|\Delta_1\| = 6.01$ ,  $\|\mathbf{R}\| = 8.25$ ,即  $\gamma = 8.25$ ,满足失配约束条件.显然,SMI 不仅具有一定的指向误差,而且具有较高的旁瓣,而 WCPO 准确地指向了信号的真实方向,而且具有较低的旁瓣.由于其它失配参数的注入,并利用其失配约束参数参与最优权矢量的求解,因此通过加载损失了较大的自由度.

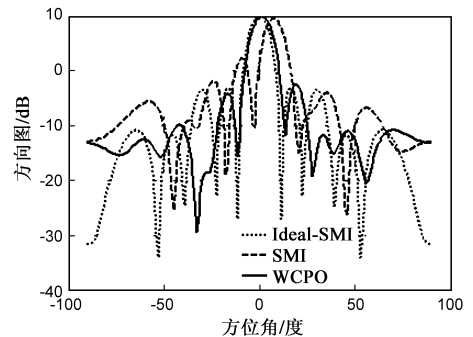


图2 有用信号和其它失配存在时的方向图(点散射源场景)

图3给出了空间分布散射源在有用信号失配存在时的方向图.仿真中共有三个空间信号(分别位于  $-10^\circ, 0^\circ, 20^\circ$ ),信噪比都为  $-5\text{dB}$ ,信号失配也是通过指向失配引入的,指向失配角也都为  $5^\circ$ ,其约束参数选择为假定信号协方差矩阵范数的 10 倍,而  $\|\Delta_2\| = 3.52$ ,  $\|\mathbf{R}_s\| = 5.73$ ,即  $\epsilon = 57.3$ ,满足失配约束条件.从图中可以看出,由于分辨率较低, Ideal-SMI 和 SMI 都指向后两个信号方向,而且 SMI 具有一定的指向误差,而 WCPO 分别在三个信号的真实方向形成了较高的波束增益,而且具有较低的旁瓣.由于前两个信号 ( $-10^\circ, 0^\circ$ ) 的方向角比较接近,为了保证无失真响应,WCPO 的前两个信号波瓣重叠在一起,同样 Ideal-SMI 和 SMI 的前两个

信号的波瓣也重叠在一起.

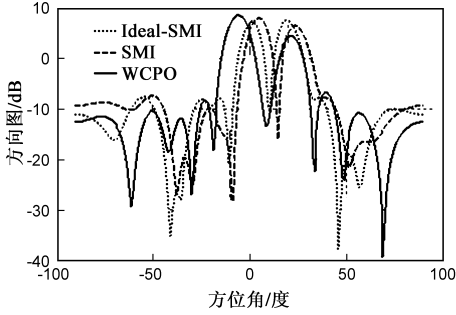


图3 有用信号失配存在时的方向图(空间分布散射源)

图4给出了空间分布散射源在有用信号和其它失配存在时的方向图,其中有用信号失配参数同图3,而其它失配引入方式同图2,而 $\|\Delta_1\| = 5.04$ ,  $\|R\| = 18.67$ ,即 $\gamma = 18.67$ ,满足失配约束条件.从方向图的比较可知,SMI不仅具有一定的指向误差,而且具有较高的旁瓣,而WCPO准确地指向了信号的真实方向,而且具有较低的旁瓣.

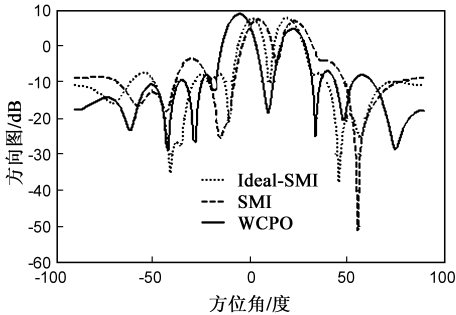


图4 有用信号和其它失配存在时的方向图(空间分布散射源场景)

从以上的仿真分析可以看出,最差性能最优稳健波束形成算法(WCPO)具有良好的稳健性,可以很好地克服有用信号和其它响应失配的影响.

## 6.2 渐进性分析

由于该稳健波束形成算法具有普遍的适用性,即不管是点散射源还是空间分布散射源,都被建模成具有相同形式的最优化问题,并具有相同的求解方法,故此处以点散射源为例进行仿真分析.重点分析有用信号失配约束参数对波束形成算法的性能影响,以及与文献[12]中的算法进行比较.其中还分析其它失配约束参数对波束形成算法的性能影响,以及波束形成算法的输出SNR相对于样本数量和信号方向角失配的变化情况,其中信号失配参数同图1.

图5和图6分别给出了文献[12]和本文方法对于点散射源在信号失配存在时的性能分析,其中 $\gamma = 0$ ,即无其它失配.图(a)为最优Lagrange乘数( $\lambda$ )和最优加载电平( $\gamma + \lambda\epsilon$ )相对于信号失配约束参数( $\epsilon$ )的变化,图(b)为波束形成算法的约束条件( $w^H(R_s - \epsilon I)w$ )相

对于信号失配约束参数( $\epsilon$ )的变化,图(c)为波束形成算法的输出SNR相对于信号失配约束参数( $\epsilon$ )的变化.比较图5和图6,从图(a)可以看出,当信号失配约束参数较小时,最优Lagrange乘数为正,随着失配约束参数的增加,最优Lagrange乘数为负,且趋于零,而且最优加载电平与最优Lagrange乘数具有相同的符号.当约束参数较大时,最优加载电平几乎恒定不变.在图(b)中,约束条件的取值随着失配约束参数的增加逐渐减小.在图(c)中,随着失配约束参数 $\epsilon$ 的增加,WCPO的输出SNR也逐渐增加,最后趋于恒定的最优值.

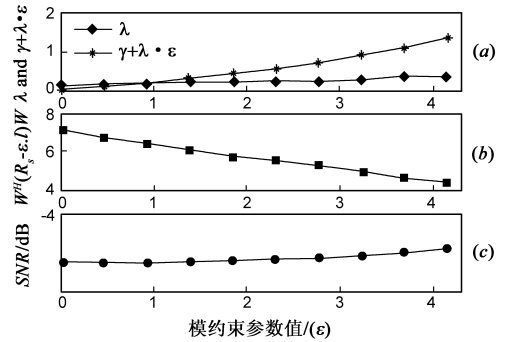


图5 信号失配约束参数对波束形成器的影响(1)

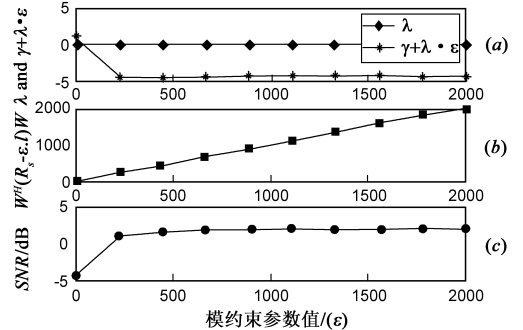


图6 信号失配约束参数对波束形成器的影响(2)

通过比较图5和图6可以发现,本文所提出的求解方法获得了最优的性能,即当 $\epsilon$ 较大时,输出SNR趋于恒定,即与 $\epsilon$ 无关,而且相比于文献[12]算法SNR的改善大约有7dB.这与理论分析的相一致,即 $\epsilon$ 选取的越大,性能的改善越接近于最优.而且通过对角加载解释算法可以看出,即图(a)中的( $\gamma + \lambda\epsilon$ ),本文算法在最优性能改善时为负加载,这与文献[12]具有本质的区别,重要的是,获得了最优的性能改善,也使得约束参数的选取更加简单,即约束参数只是参与最优权计算的辅助参数.

图7给出了点散射源在其它失配存在时的性能分析,其中 $\epsilon = 100$ .子图的参数和曲线意义同图5和图6,图(a)中的最优Lagrange乘数和加载电平随着其它失配约束参数的增加而减小.图(b)中的约束条件取值随着失配约束参数的增加而增加,并趋于一恒定值.图3(c)中WCPO的SNR随着其它失配约束参数的增加而减

小,最后也趋于某一恒定值.

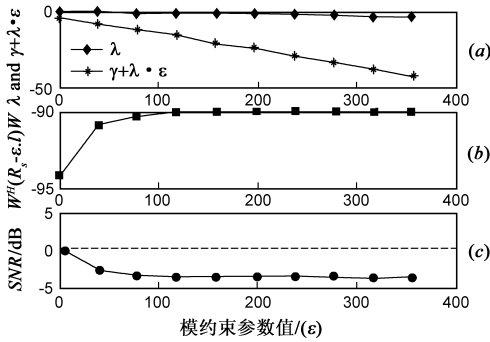


图7 其它失配约束参数对波束形成器的影响

从图5~7的仿真分析可以得出,文献[12]中的仿真只是所提出算法仿真的前面一小部分,因此约束参数的影响比较大,即没有达到最优的性能改善.

从图5~7的仿真也可以看出,当有用信号失配约束参数较大时,该参数的选择对WCPO的影响较小,然而其它失配约束参数对WCPO的影响较大.这是由于其它失配约束参数出现在最优化问题的目标函数中,其大小直接影响着波束形成算法的性能.当其它失配约束参数给定时,对于给定的接收数据和未知的失配,波束形成算法的最优加权矢量一定是存在的而且唯一,而失配约束参数是人为指定的,因此最优解不应依赖于该参数,而是依赖于接收的数据和未知的失配.这可以从对角加载形式的解得到,因为当有用信号失配约束参数较大时,最优加载电平恒定不变,因此最优加权矢量也不变.所以当有用信号失配约束参数较大时,WCPO即可得到最优解,而且也可以通过SNR相对于约束参数的变化得到进一步的证实.在按照对角加载形式进行求解时,最优的加载电平为负,即最优的负加载可以获得最优的性能改善.

图8给出了点散射源在信号失配存在时,SNR相对于样本数量的变化.显然,WCPO的SNR相对于Ideal-SMI要高很多,大约有2dB,这可以利用图1~4解释,即WCPO相对于Ideal-SMI具有较低的旁瓣.在小样本数量条件下,WCPO的SNR起伏较大,但是随着样本数量的增加,SNR曲线的起伏明显降低,并在一常数

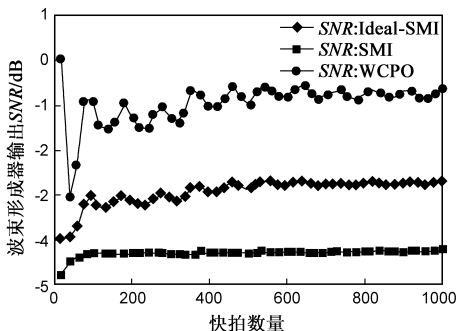


图8 信号失配时SNR相对于样本数量的变化

(-1dB)附近波动.

图9给出了点散射源在信号失配存在时,SNR相对于信号方向角失配的变化.当失配的角度误差在 $[-7^\circ, 7^\circ]$ 的范围之内变化时,相对于SMI和Ideal-SMI,WCPO具有较高的SNR,而且在仿真中,WCPO的方向图也准确地指向了实际的信号方向.

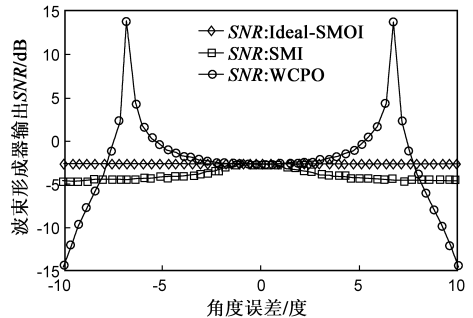


图9 信号失配时SNR相对于信号失配角的变化

### 6.3 仿真分析小结

综上仿真分析,可以得出以下结论:(1)本文所提出的算法是正确的和有效的,不仅可以得到最优解,而且可以获得最优的性能改善;(2)当以对角加载形式进行求解时,最优的负加载可以达到最优的性能改善;(3)当失配约束参数较大时,参数的选择并不影响波束形成器的性能,但是决定着最优加权矢量的求解,而且对于给定的接收数据和未知的失配参数,最优加权矢量是存在的而且唯一,即接收数据和失配参数决定最优权,而误差约束参数只是计算最优权的辅助参数,并且最优权与其无关;(4)为了获得最优的性能改善,有用信号失配约束参数应选择较大的数值,而其它失配约束参数应选择尽可能接近失配量范数的数值.

### 7 结论

本文通过对文献[12]中的空间分布散射信号源稳健波束形成算法进行深入的研究,提出了一种新的通用信号模型稳健波束形成算法,不仅得到了封闭形式的最优加权矢量,而且获得了最优的性能改善.其中分析了该算法与传统对角加载之间的关系,给出了最优加载电平的求解方法,并得出与文献[12]和其它文献截然不同的结论,即具有负加载的最优解才可以获得最优的性能改善.其中不仅获得了相比于文献[12]更加优越的改善性能,而且发现约束参数只是用于求解最优权的辅助参数,得出当失配约束参数较大时,参数的选择并不影响波束形成器的性能,决定最优解的只是给定的接收数据和未知的失配参数.

#### 参考文献:

[1] D D Feldman, L J Griffiths. A projection approach to robust

- adaptive beamforming [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(4): 867 - 876.
- [2] J R Guerci. Theory and application of covariance matrix tapers for robust adaptive beamforming [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1999, 47(4): 997 - 985.
- [3] Z Tian, K L Bell, H L Van Trees. A recursive least squares implementation for LCMP beamforming under quadratic constraint [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2001, 49(6): 1138 - 1145.
- [4] 刘聪锋, 廖桂生. 线性干扰参数约束的稳健 LSMI 波束形成算法 [J]. 电子学报, 2009, 37(6): 1386 - 1392.  
Liu Cong-feng, Liao Gui-sheng. Robust LSMI beamforming algorithm under linear jammer parameter constraint [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(6): 1386 - 1392. (in Chinese)
- [5] Ayman Elnashar, Said M. Elnoubi, Hamdi A. El-Mikati. Further study on robust adaptive beamforming with optimum diagonal loading [J]. IEEE Trans Antennas Propagation, 2006, 54(12): 3647 - 3658.
- [6] Jian Li, Petre Stotica, Zhisong Wang. On robust capon beamformer and diagonal loading [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2003, 51(7): 1702 - 1715.
- [7] Jian Li, Petre Stotica, Zhisong Wang. Doubly constrained robust capon beamformer [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2004, 52(9): 2407 - 2423.
- [8] 刘聪锋, 廖桂生. 基于模约束的稳健波束形成算法 [J]. 电子学报, 2008, 36(3): 440 - 445.  
Liu Cong-feng, Liao Gui-sheng. Robust Capon beamformer under norm constraint [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(3): 440 - 445. (in Chinese)
- [9] Sergiy A. Vorobyov, Alex B. Gershman, Zhi-Quan Luo. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: A solution to the signal mismatch problem [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2003, 51(2): 313 - 324.
- [10] 刘聪锋, 廖桂生. 基于最差性能最优的稳健 STAP 算法 [J]. 电子学报, 2008, 36(3): 581 - 585.  
Liu Cong-feng, Liao Gui-sheng. Robust STAP algorithm using worse-case performance optimization [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(3): 581 - 585. (in Chinese)
- [11] Jisung Oh, Seung-Jean Kim, Kan-Lin Hsiung. A computationally efficient method for robust minimum variance beamforming [A]. Vehicular Technology Conference 2005 [C]. Stockholm, Sweden: IEEE, Vol. 2, June, 2005. 1162 - 1165.
- [12] Shahram Shahbazpanahi, Gershman Alex B, Luo Zhiquan, et al. Robust adaptive beamforming for general-rank signal models [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2003, 51(9): 2257 - 2269.
- [13] Robert G L, Stephen P B. Robust minimum variance beamforming [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2005, 53(5): 1684 - 1696.
- [14] Cesar C G, Ignacio S, Javier V, et al. Robust array beamforming with sidelobe control using support vector machines [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2007, 55(2): 574 - 585.
- [15] Mutapcic A, Kim S J, Boyd B. Beamforming with uncertain weights [J]. IEEE Signal Processing Letter, 2007, 14(5): 348 - 351.
- [16] Chen C Y, Vaidyanathan P P. Quadratically constrained beamforming robust against direction-of-arrival mismatch [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2007, 55(8): 4139 - 4150.
- [17] Eldar Y C, Nehorai A, La Rosa P S. A competitive mean-squared error approach to beamforming [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2007, 55(11): 5143 - 5154.

#### 作者简介:



刘聪锋(通信作者) 男, 1973年7月1日出生于陕西蓝田, 博士后、副教授. 分别于1996、1999年获解放军电子工程学院学士、硕士学位, 2008年获西安电子科技大学博士学位. 1999 - 2004年在西安卫星测控中心从事卫星测控总体、无线电测控总体工作, 2004年10月转业到西安电子科技大学电子工程学院从事教学、科研工作. 研究方向为信号处理在雷达与通信中的应用. E-mail: cfliu@mail.xidian.edu.cn



廖桂生 男, 1963年6月生于广西桂林, 教授, 博士生导师, 雷达信号处理重点实验室副主任, IEEE 会员, 1985年毕业于广西大学数学系, 分别于1990年、1992年获西安电子科技大学硕士和博士学位, 主要从事统计信号处理、阵列信号处理和空时自适应信号处理及其在雷达、通信中的应用研究. E-mail: gsliao@xidian.edu.cn

